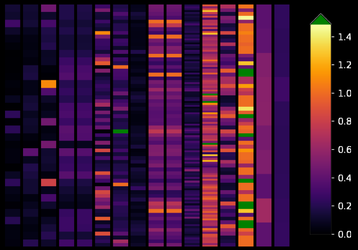
Métricas de Equivarianza Transformacional para Redes Neuronales Convolucionales

Facundo Manuel Quiroga
III-LIDI Instituto de Investigación en Informática
Universidad Nacional de La Plata

9 de Marzo de 2020

Directora: Laura Lanzarini



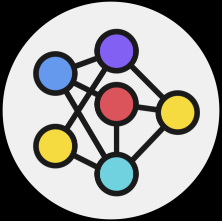
Motivación

¿Cómo codificamos…

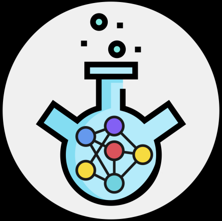
¿  =  =  ?

… con una Red Neuronal?

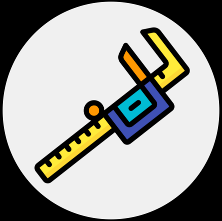
Índice



1. Marco teórico



2. Experi-mentos con Invarianza



3. Métricas

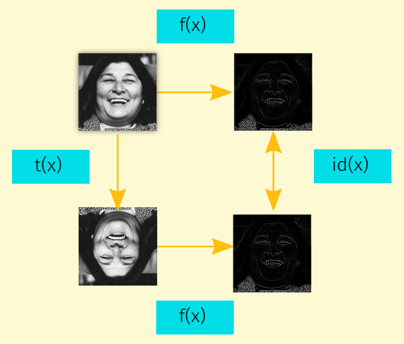
4. Análisis con Métricas

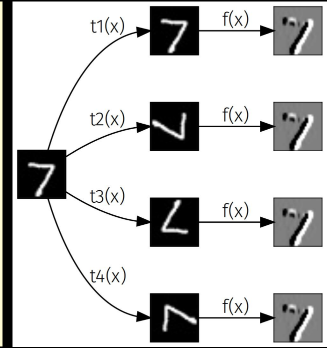
1. Marco teórico

Invarianza

f es **invariante** a $T = t_1, \ldots, t_m$ sii $\forall x$:

$$f(t_1(x)) = f(t_2(x)) = \cdots = f(t_m(x))$$ [1]

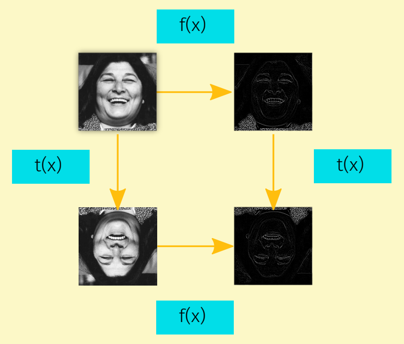


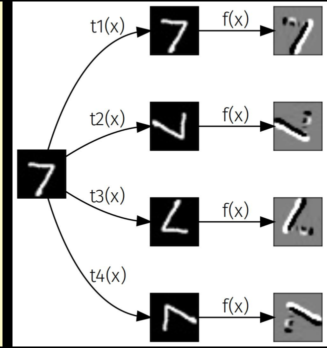


Auto Equivarianza

f es **auto equivariante** a $T = t_1, \ldots, t_m$ sii $\forall x, \forall t \in T$:

$$f(t(x)) = t(f(x)) \qquad [2]$$



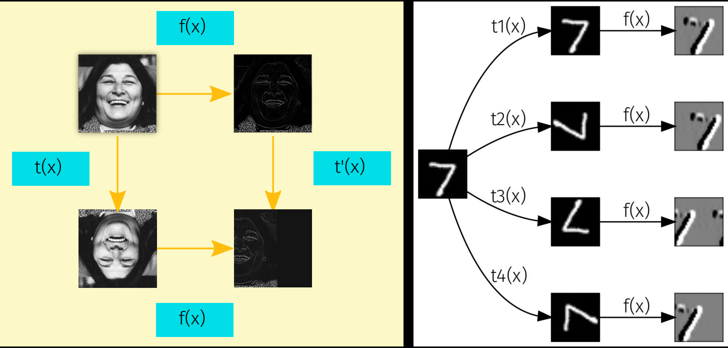


Equivarianza

f es **equivariante** a $T = t_1, \dots, t_m$ sii $\forall t \in T, \exists t', \forall x$:

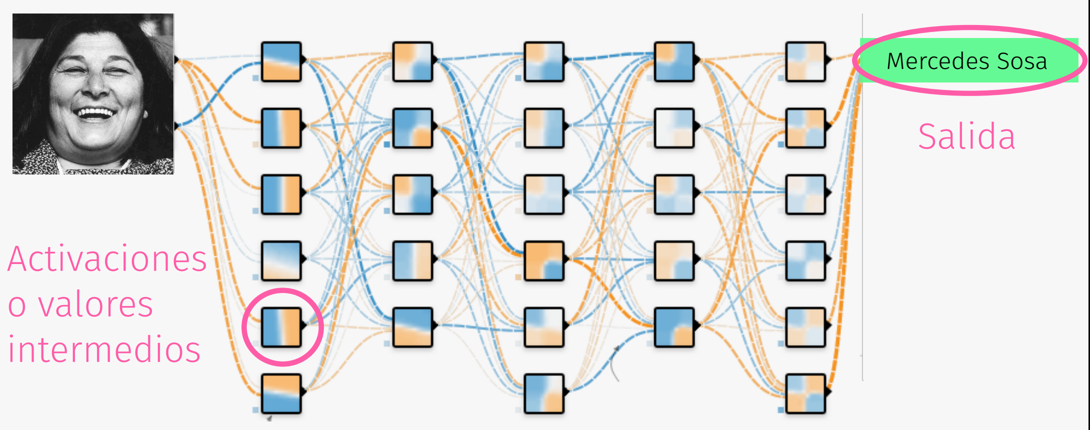
$$f(t(x)) = t'(f(x))$$

[3]



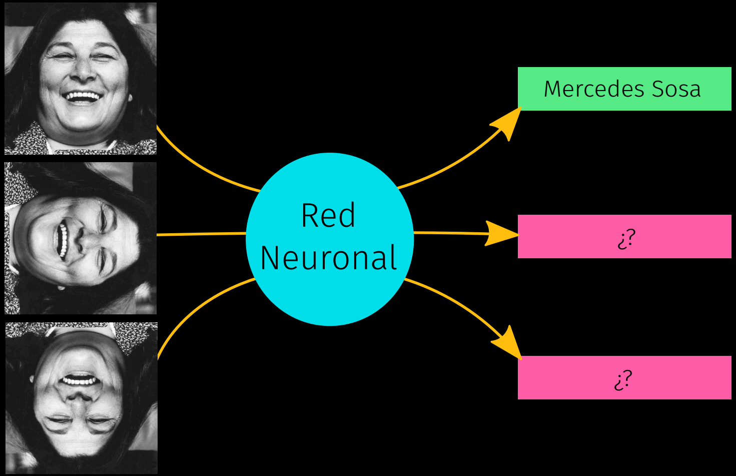
Red Neuronal

Estructurada en capas/activaciones.
Representaciones de caja negra complejas.



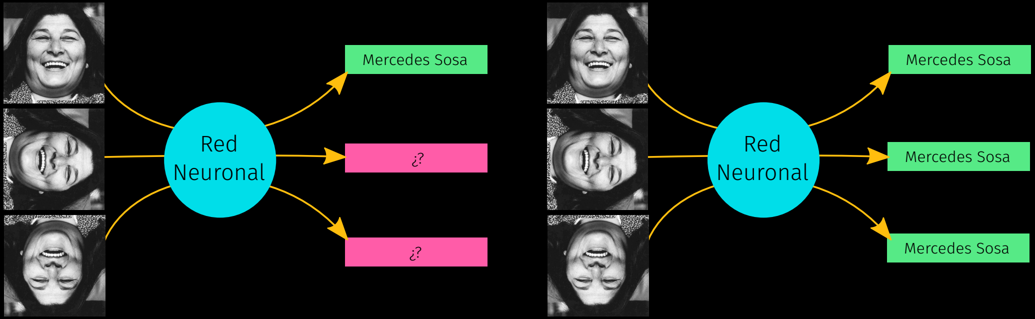
Red vs Transformaciones

Difícil lidiar con entradas transformadas.



Objetivo

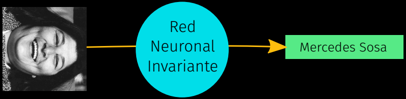
¿Qué diferencia a estos modelos?



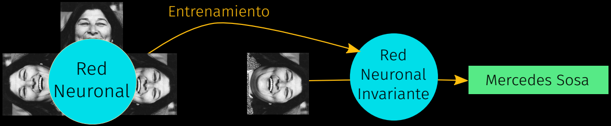
Redes Neuronales Invariantes

1. Modelo de transformación:

2. Modelo con capas invariantes:



3. Aumentación de datos:

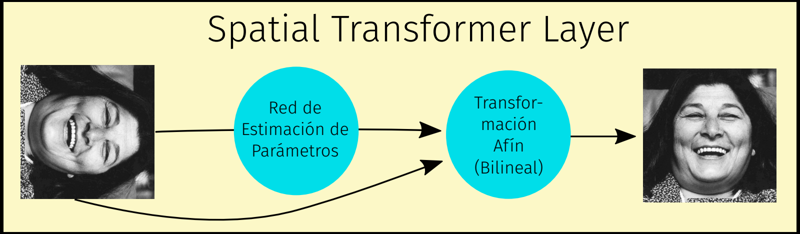


Spatial Transformer Network (STN)

Modelo de transformación (afín) end-to-end

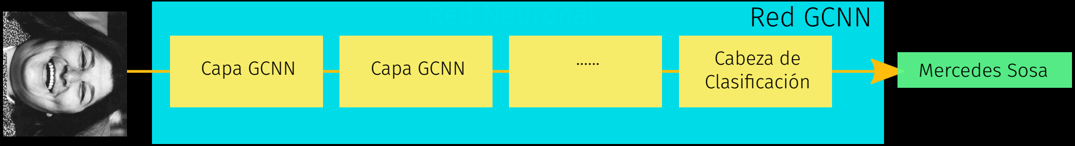
- Red STN

- Capa STL

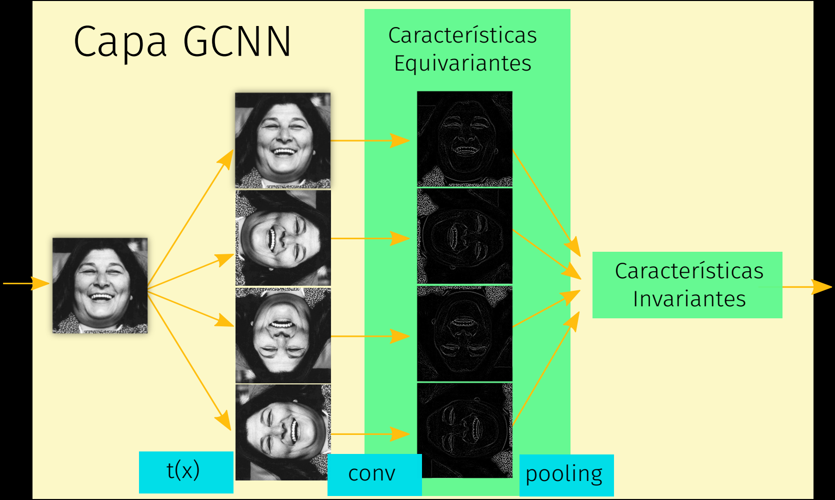


Group CNN (GCNN)

Modelo con Capas Convolucionales Invariantes



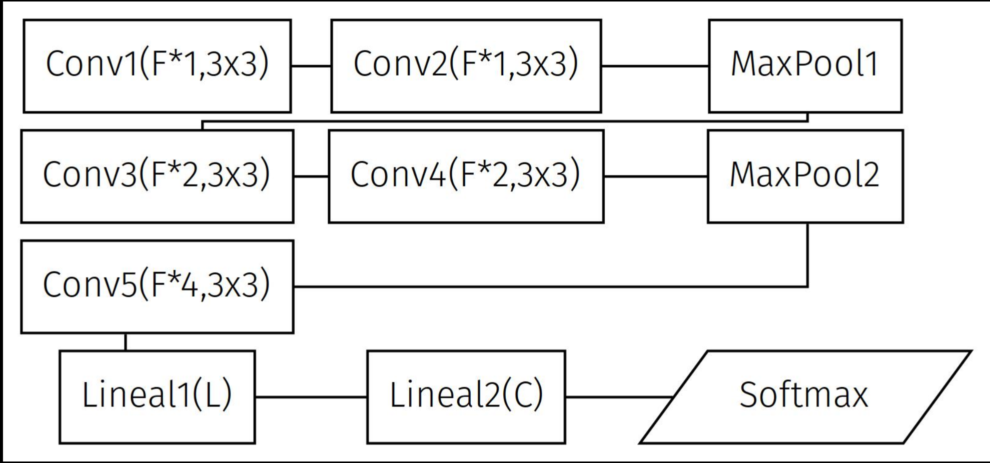
Modelo con Capas Convolucionales Invariantes



2. Experimentos con Invarianza

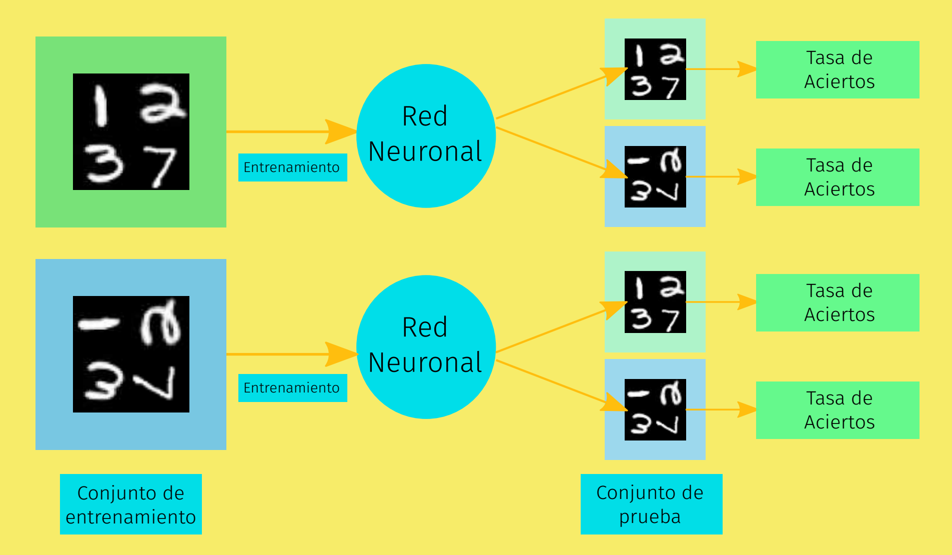
Transformaciones y Bases de Datos

Modelo

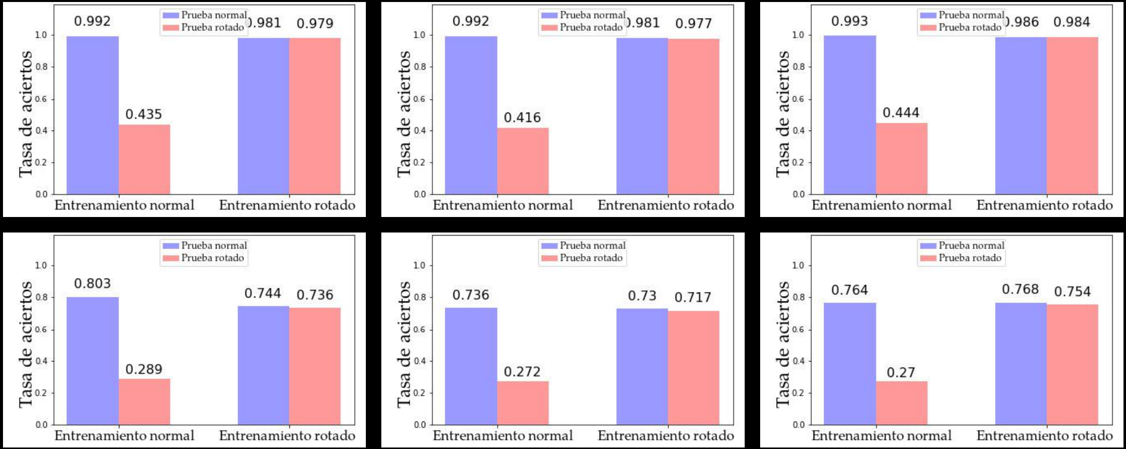


SimpleConv

Experimento 1: Aumentación vs Modelos



Resultados Experimento 1: Rotación/SimpleConv



MNIST

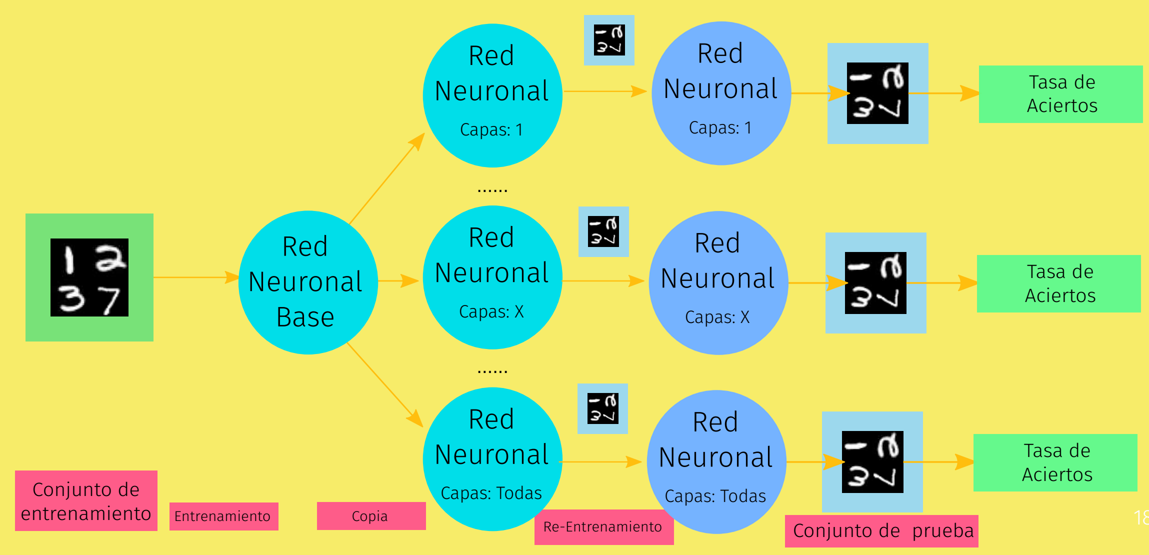
CIFAR10

SimpleConv+DA

SimpleConv+STN

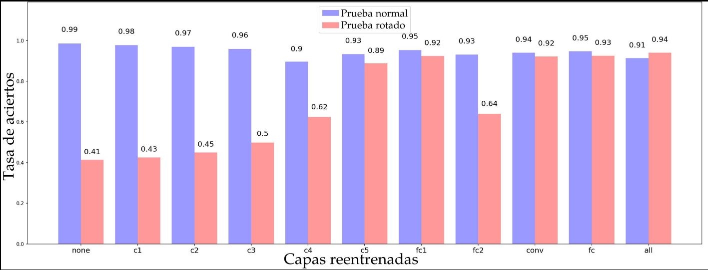
SimpleConv+GCNN

Experimento 2: Re-entrenamiento

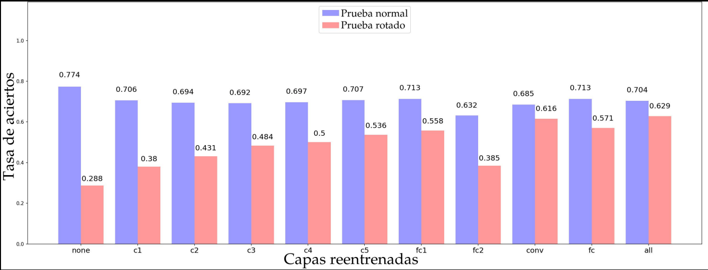


Resultados Experimento 2: Rotación

MNIST



CIFAR10



Conclusiones

$\star$ Capas Invariantes $\neq$ Modelo Invariante
$\star$ Codificación de la (equi?) invarianza varía por capa

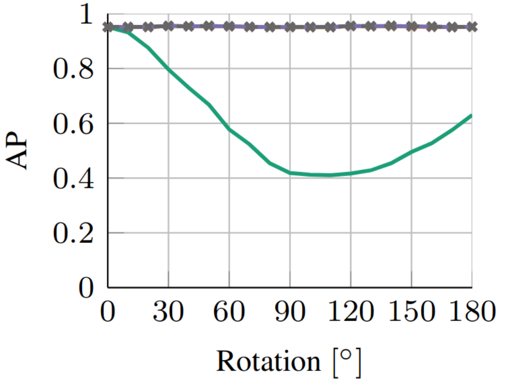
$\rightarrow$ Estudiar la codificación por capa
- Modelos Invariantes
- Modelos **comunes** entrenados con **aumentación de datos**

3. Métricas: Contribuciones

Métricas para evaluar Invarianza

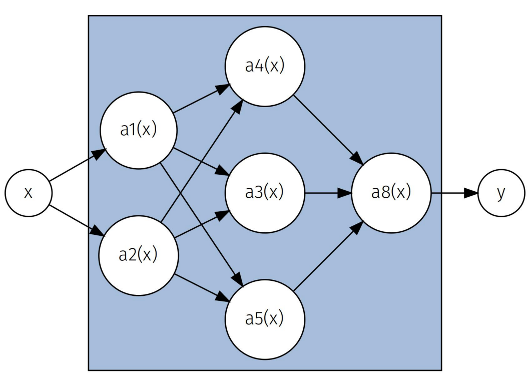
Invarianza = Tasa de acierto
→ ejemplos originales vs transformados

[Pen+14; FF15; TC16; Eng+17; KWT17; Kan17; Qui+18; BRW18; Amo+18; SG18; AW18; Kau18]



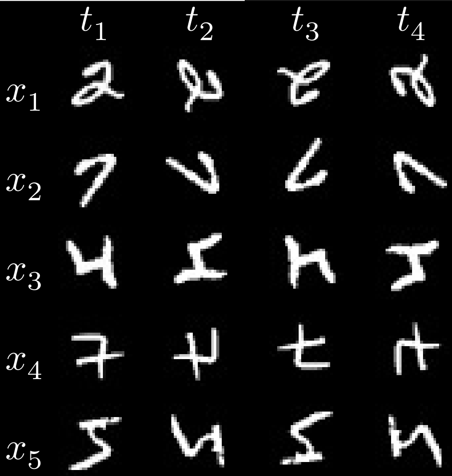
- Ejemplos originales.
- Ejemplos transformados.

Métricas por activaciones



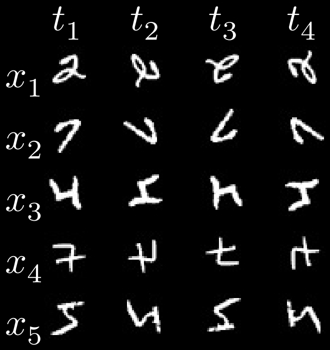
8 activaciones distintas → 8 métricas independientes

Fuentes de variacion



- Muestras
  - $x_1, \ldots, x_n$
  - filas
- Transformaciones
  - $t_1, \ldots, t_m$
  - columnas

Matriz $\mathbf{MT}$:Muestra-Transformación de Activaciones

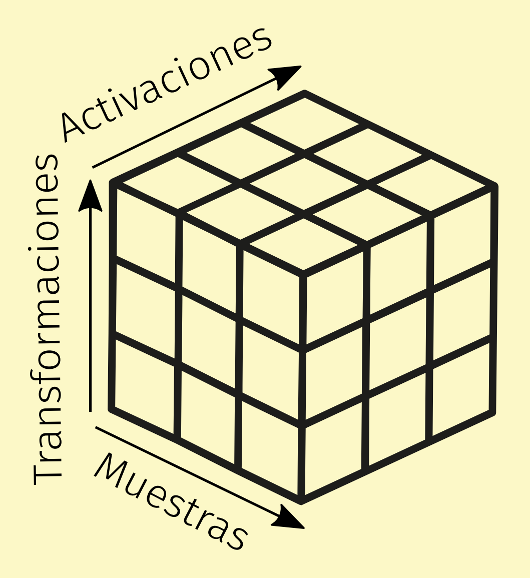


(a) Muestras y transformaciones

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \quad t_1 \quad & \quad t_2 \quad & \quad t_3 \quad & \quad t_4 \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\
a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\
a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\
a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\
a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5))
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

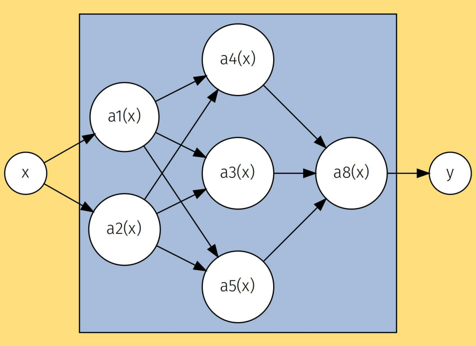
(b) Matriz $\mathbf{MT}(a)$

Matrices $\mathbf{MT}$



- n Muestras
- m Transformaciones
- k Activaciones
- $\rightarrow k$ matrices $\mathbf{MT}$ de $n \times m$

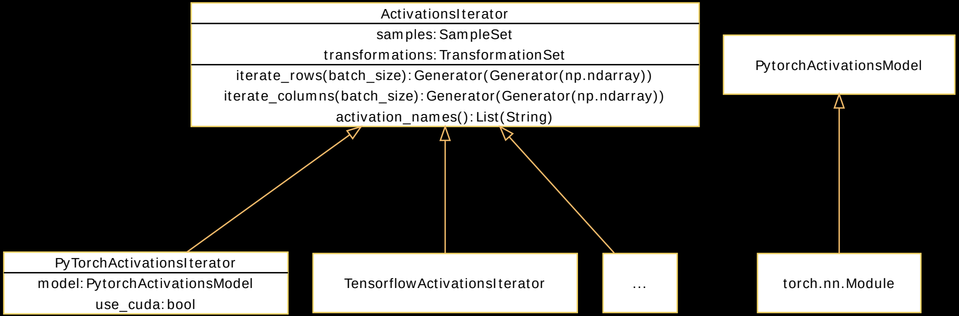
Matrices $\mathbf{MT}$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{bmatrix} a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\ a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\ a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\ a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\ a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5)) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Recorrido estándar:
  - Entrada: $t_k(x_i)$
  - Salida: Vector de k elementos
- Recorrido deseado:
  - Entrada: activación a
  - Salida: Matriz $\mathbf{MT}(a)$ de $m \times n$

Librería para iterar sobre matrices MT



Iteradores y métricas:

https://github.com/facundoq/transformational_measures

Métricas propuestas

- Métricas de Invarianza
    - Basadas en ANOVA
    - Basadas en Varianza, Distancia
    - Con o sin normalización
- Métricas de Auto-Equivarianza
    - Basadas en Varianza o Distancia
    - Con o sin normalización

Métrica ANOVA

Matriz $\mathbf{MT} \simeq$ matriz de ANOVA de una vía

Transformaciones $\simeq$ grupos

Invarianza $=$ NO rechazar

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \quad t_1 \quad & \quad t_2 \quad & \quad t_3 \quad & \quad t_4 \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\
a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\
a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\
a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\
a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5))
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Corrección de Bonferroni

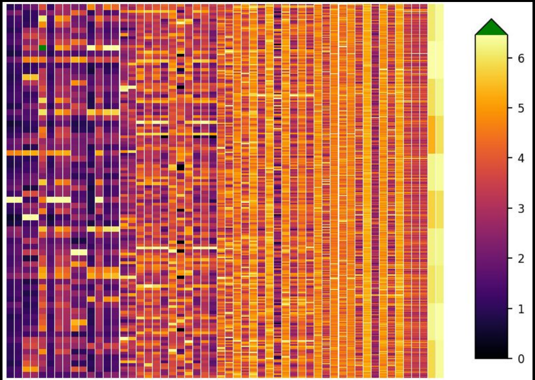
Métrica Varianza Transformacional

$$
\begin{array}{cc}
 & \rightarrow \text{(1) Var} \\
\text{(2) Media} \downarrow &
\begin{bmatrix}
a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\
a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\
a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\
a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\
a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5))
\end{bmatrix}
\end{array}
\Longrightarrow Media\left(\begin{bmatrix}
Var([\, a(t_1(x_1)) \; a(t_2(x_1)) \; a(t_3(x_1)) \; a(t_4(x_1)) \,]) \\
Var([\, a(t_1(x_2)) \; a(t_2(x_2)) \; a(t_3(x_2)) \; a(t_4(x_2)) \,]) \\
Var([\, a(t_1(x_3)) \; a(t_2(x_3)) \; a(t_3(x_3)) \; a(t_4(x_3)) \,]) \\
Var([\, a(t_1(x_4)) \; a(t_2(x_4)) \; a(t_3(x_4)) \; a(t_4(x_4)) \,]) \\
Var([\, a(t_1(x_5)) \; a(t_2(x_5)) \; a(t_3(x_5)) \; a(t_4(x_5)) \,])
\end{bmatrix}\right)
$$

$$
VT(a) = Media\left(\begin{bmatrix} Var(\mathbf{MT}(a)[1,:]) \\ \cdots \\ Var(\mathbf{MT}(a)[n,:]) \end{bmatrix}\right) \qquad [4]
$$

Métrica Varianza Transformacional- Visualización

- Columnas: Capas
- Rectángulos: Activaciones de la capa
- Color: Valor de la métrica



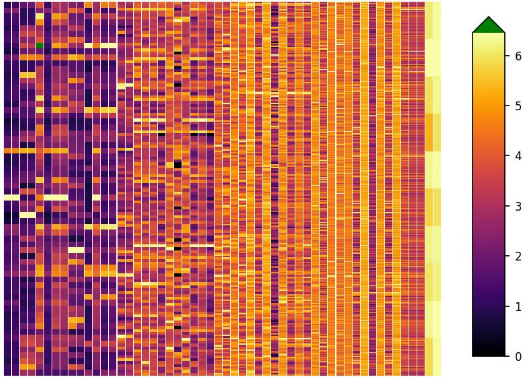
Métrica Varianza Muestral

$$
\begin{array}{cc}
 & \rightarrow \text{(2) Media} \\
\text{(1) Var} \downarrow &
\begin{bmatrix}
a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\
a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\
a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\
a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\
a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5))
\end{bmatrix}
\end{array}
\implies Media\left(\left[Var\left(\begin{bmatrix} a(t_1(x_1)) \\ a(t_1(x_2)) \\ a(t_1(x_3)) \\ a(t_1(x_4)) \\ a(t_1(x_5)) \end{bmatrix}\right), Var\left(\begin{bmatrix} a(t_2(x_1)) \\ a(t_2(x_2)) \\ a(t_2(x_3)) \\ a(t_2(x_4)) \\ a(t_2(x_5)) \end{bmatrix}\right), Var\left(\begin{bmatrix} a(t_3(x_1)) \\ a(t_3(x_2)) \\ a(t_3(x_3)) \\ a(t_3(x_4)) \\ a(t_3(x_5)) \end{bmatrix}\right), Var\left(\begin{bmatrix} a(t_4(x_1)) \\ a(t_4(x_2)) \\ a(t_4(x_3)) \\ a(t_4(x_4)) \\ a(t_4(x_5)) \end{bmatrix}\right)\right]\right)
$$

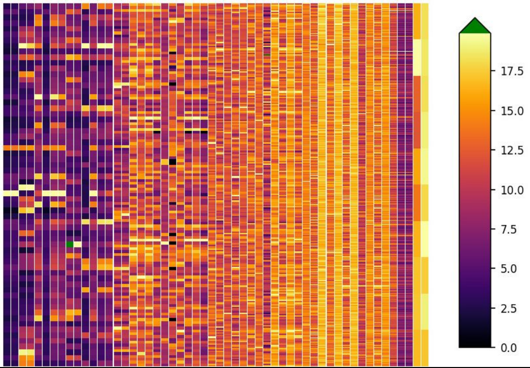
$$
VM(A) = Media\left(\left[Var(\mathbf{MT}[:,1]) \quad \cdots \quad Var(\mathbf{MT}(a)[:,m])\right]\right)
$$

[5]

Métrica Varianza Muestral- Visualización



Varianza Transformacional



Varianza Muestral

Métrica Varianza Normalizada

Definición:

$$VN(a) = \frac{VT(a)}{VM(a)} \quad [6]$$

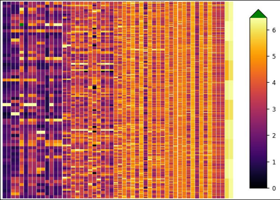
Casos:

- $VN(a) = 0$
- $VN(a) < 1$
- Si $VN(a) > 1$
- Si $VN(a) \simeq 1$

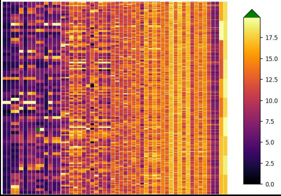
Métrica Varianza Normalizada- Eficiencia

- Calculo online de varianza y media
  - Algoritmo de Welford
  - $\rightarrow VT \in \mathcal{O}(n \times m \times k)$
  - $\rightarrow VM \in \mathcal{O}(n \times m \times k)$
- $\rightarrow VN \in \mathcal{O}(n \times m \times k)$

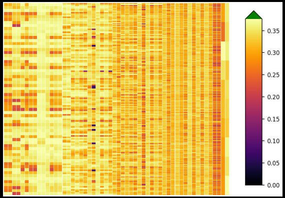
Métrica Varianza Normalizada- Visualización



(a) Varianza Transformacional



(b) Varianza Muestral



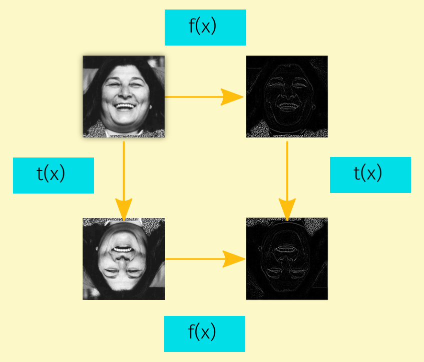
(c) Varianza Normalizada

Métrica Distancia Normalizada

- Reemplazar Var por DistanciaMedia
- DistanciaMedia entre pares de activaciones
  - Cualquier medida de distancia
- Misma interpretación que Varianza Normalizada
- Eficiencia $\mathcal{O}(max(m,n) \times m \times n \times k)$
  - Versión aproximada $\mathcal{O}(b \times m \times n \times k)$ (b tamaño de lote)
- Para distancia euclídea
  - $\text{DistanciaMedia}(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}) = 2\,Var(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix})$
  - $DN(a) = VN(a)$

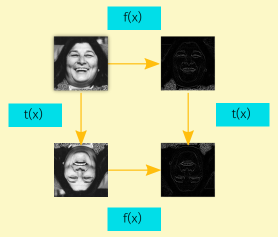
Métricas de Auto-Equivarianza

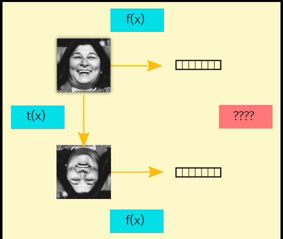
- Equivarianza
  - Estimar t'
- Auto-Equivarianza
  - $t' = t$



Métricas de Auto-Equivarianza

- $x \in Dom(t)$ (por def)
- $t' = t$ (Auto-Equivarianza)
- $\rightarrow f(x) \in Dom(t)$
  - Si $x \in R^{h \times w \times c}$
  - y $f(x) \in R^{h' \times w' \times c'}$
    - puedo medir
  - Si $x \in R^{h \times w \times c}$
  - y $f(x) \in R^{l}$
    - no puedo medir

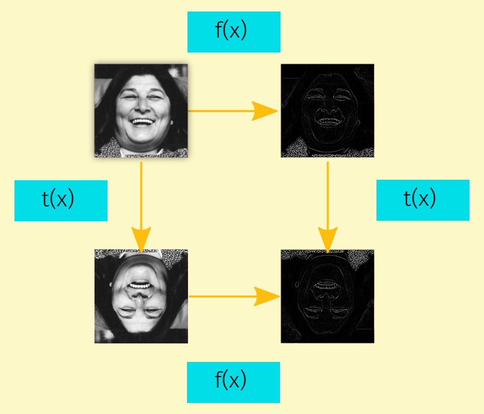




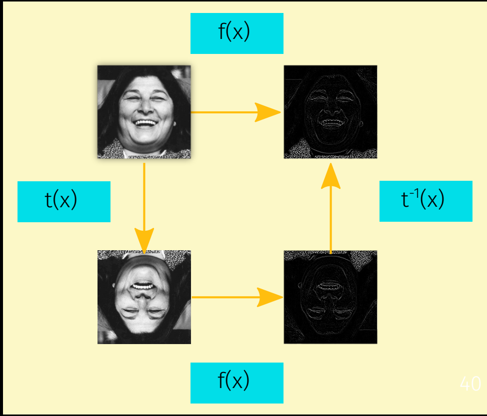
Medir conjuntos de activaciones $A = [a_1, \ldots, a_k] \in Dom(t)$

Métricas de Auto-Equivarianza

- Asumimos $id \in T = [t_1, \ldots, t_m]$
- Asumimos t_i invertible



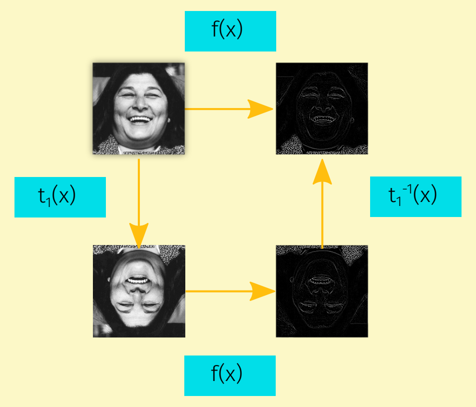
=

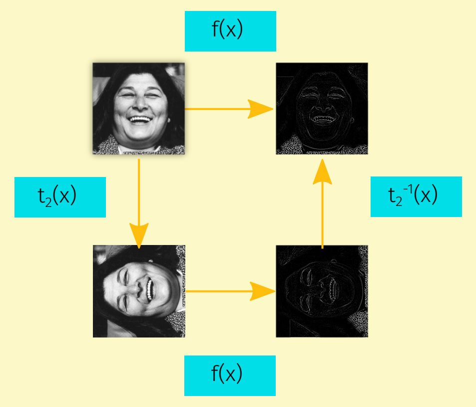


Métricas de Auto-Equivarianza

- Medir

$$f(x) = t_1^{-1}(f(t_1(x))) = t_2^{-1}(f(t_2(x))) = \cdots = t_m^{-1}(f(t_m(x)))$$





...

Auto-Equivarianza Transformacional de Varianza

- A conj de activaciones tal que $A \in Dom(t)$
- Matriz $\mathbf{MT}'$ modificada
  - $\mathbf{MT}'(A)[i,j] = t_j^{-1} A(t_j(x_i))$
- $\mathbf{MT}'(A)[i,j] \in Dom(t)$

$$
\begin{aligned}
AETV(A) = \mathrm{Media}(& \\
& Var(\mathbf{MT}'(A)[1,:]), \\
& \ldots, \\
& Var(\mathbf{MT}'(A)[n,:]) \\
&)
\end{aligned}
\quad [7]
$$

Mét. Auto-Equivarianza Normalizada de Varianza

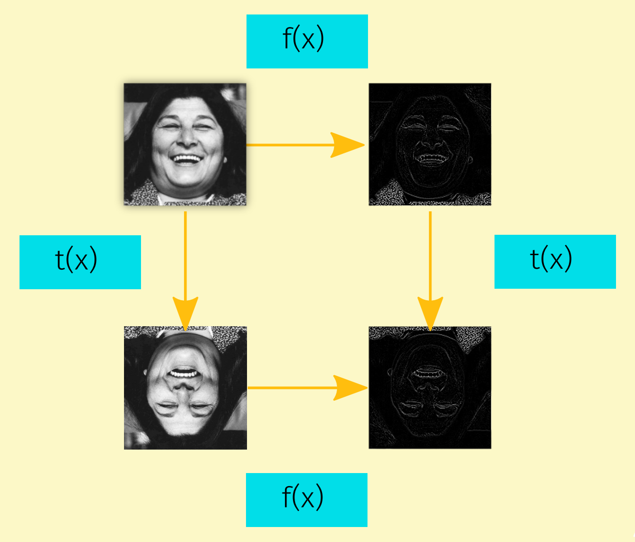
- Auto-Equivarianza Muestral de Varianza
  - Similar a AETV
- Auto-Equivarianza Normalizada de Varianza

$$AENV(A) = \frac{AETV(A)}{AEMV(A)} \qquad [8]$$

- Misma interpretación que Varianza Normalizada
- Misma generalización a $AETD$

Métrica Auto-Equivarianza de Distancia Simple

- Las métricas anteriores asumen t_i invertible
- Alternativa: Comparar $f(t(x))$ con $t(f(x))$



Métricas - Resumen

- Invarianza
  - ANOVA
  - Basadas en Varianza
    - Transformacional
    - Muestral
    - Normalizada
  - Basadas en Distancia
    - Transformacional
    - Muestral
    - Normalizada

- Auto-Equivarianza
  - Basadas en Varianza
    - Transformacional
    - Muestral
    - Normalizada
  - Basadas en Distancia
    - Transformacional
    - Muestral
    - Normalizada
  - Auto-Equivarianza de Distancia Simple

Métricas - Conclusiones

- Métricas de Invarianza y Auto-Equivarianza Normalizadas
  - Cociente entre Transformaciones y Muestras
- Métricas basadas en varianza
  - Eficientes: $\mathcal{O}(k \times m \times n)$
- Métricas basadas en distancia
  - Más flexibles
  - Aproximadas y menos eficientes: $\mathcal{O}(b \times k \times m \times n)$
- Sirven para cualquier red neuronal
- Posibilidad de especializar para capas especiales
- Código libre:

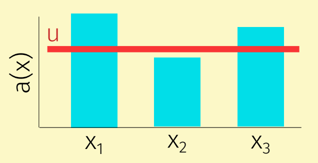
`https://github.com/facundoq/transformational_measures`

4.Experimentos de Análisis de Equivarianza

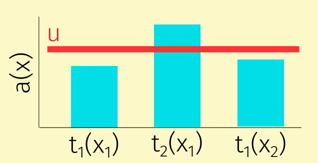
Métrica de Invarianza de Goodfellow [Goo+09]

1. Independiente para cada activación a
2. Noción de *tasa de disparos* con umbral u
3. Si $a(x) > u$ entonces $a(x)$ está *activa*
4. Definiciones
   4.1 $Global(a, u) = \mathbb{E}_{x \in X}(a(x) > u)$
   4.2 $Local(a, u) = \mathbb{E}_{x \in X, t \in T}(a(t(x)) > u)$
   4.3 $Goodfellow(a, u) = \frac{Local(a,u)}{Global(a,u)}$
5. $u := u*$ tal que $Global(a, u*) = 0.01$

Global



Local



Problemas: u es percentil, *tasa de disparos*, interpretabilidad

Experimentos con métricas

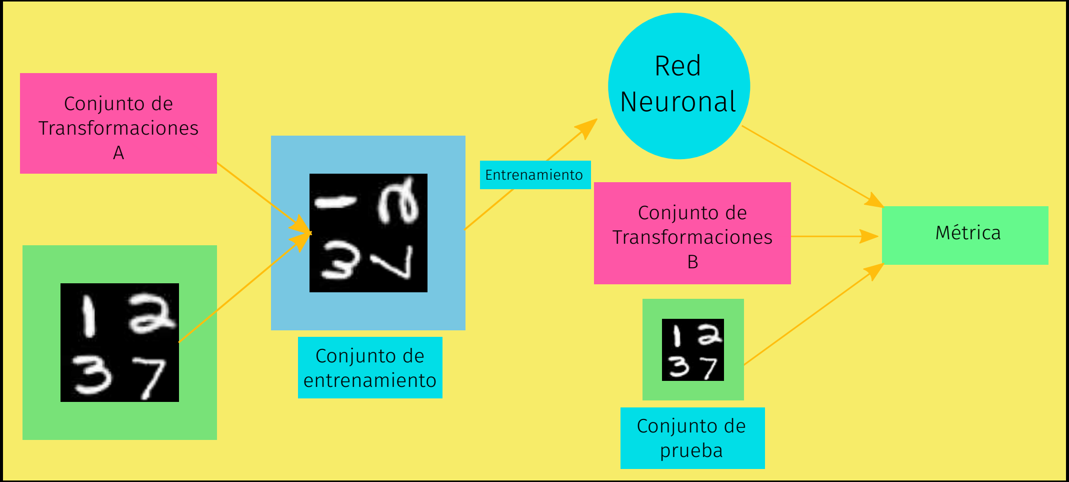
Objetivos

1. Validar las métricas
2. Analizar sus propiedades
3. Comprender modelos

Modelos/Datos/Transformaciones/Métricas

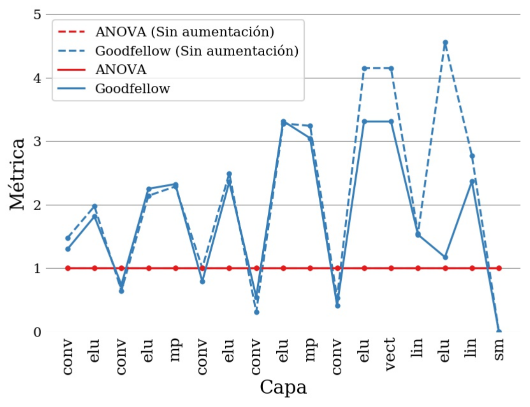
- SimpleConv
- MNIST/CIFAR10
- Rotaciones
- Invarianza de VN

Métodología

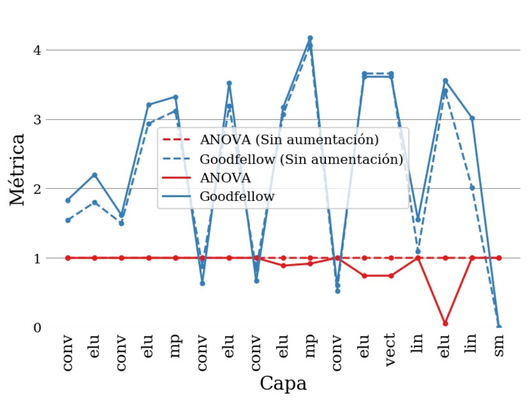


Posibilidades: $A = B$, $A \neq B$, $A \subseteq B$ $A = [id]$,

Invarianza - Anova, Goodfellow

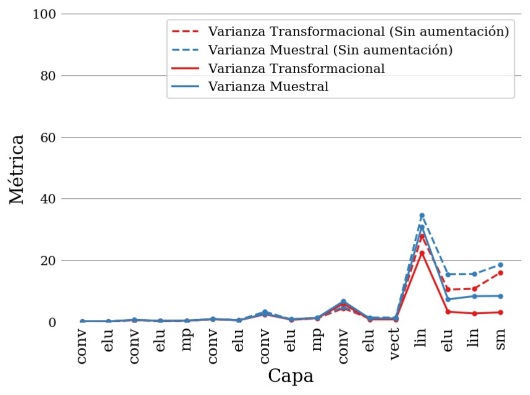


MNIST

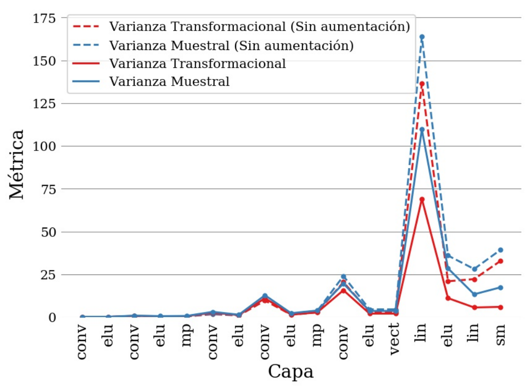


CIFAR10

Invarianza - VT y VM

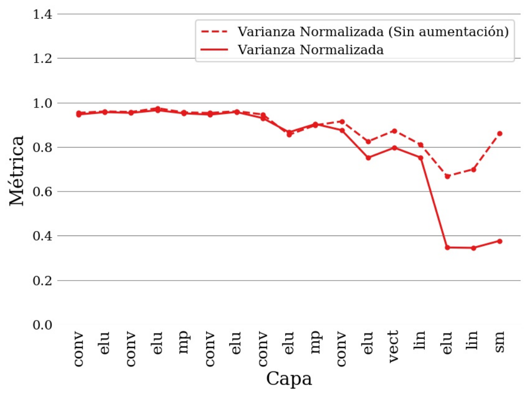


MNIST

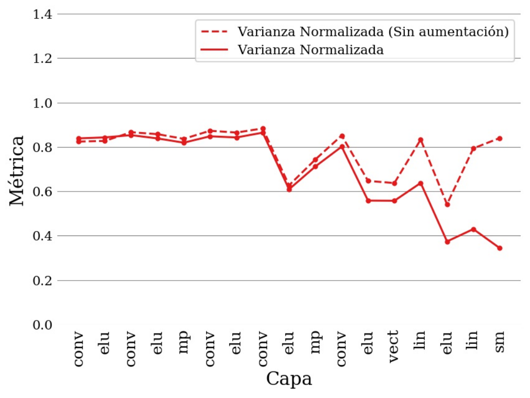


CIFAR10

Invarianza - VN

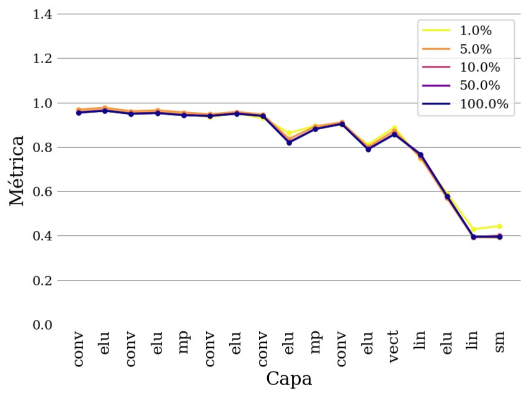


MNIST

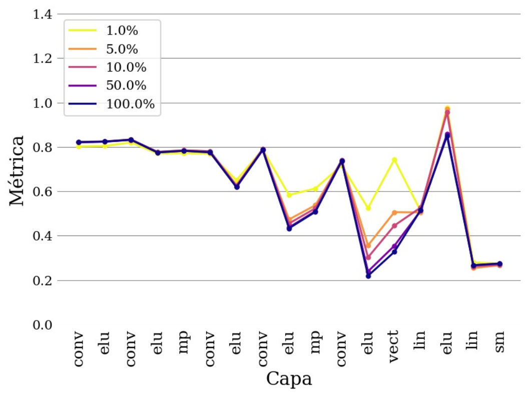


CIFAR10

Tamaño del Conjunto de Datos - Invarianza VN

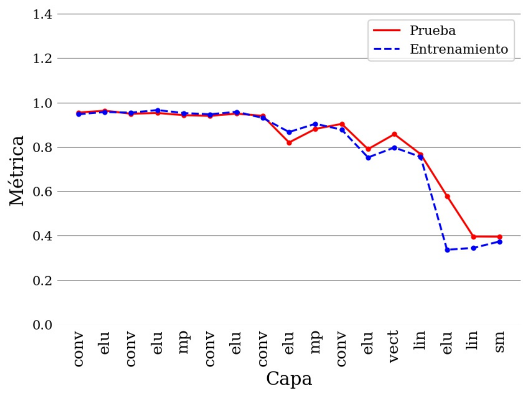


MNIST

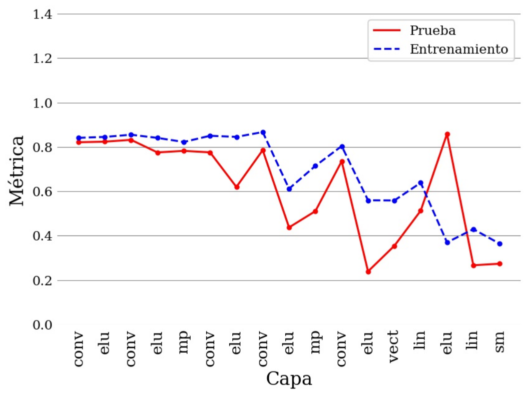


CIFAR10

Subconjunto de Datos - Invarianza VN

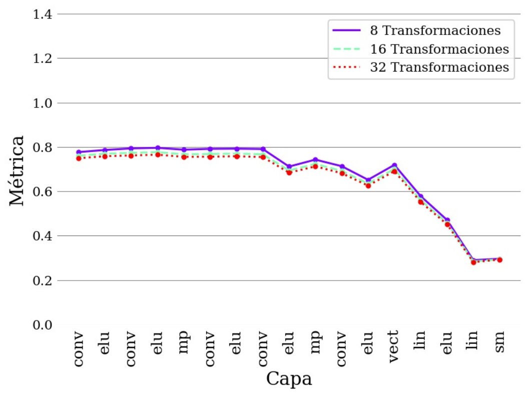


MNIST

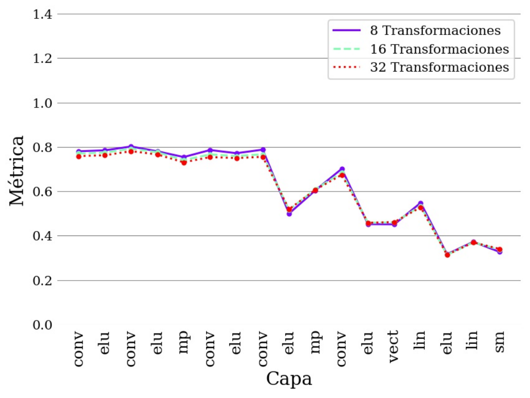


CIFAR10

Tamaño del Conj. de Transformaciones - Invarianza V

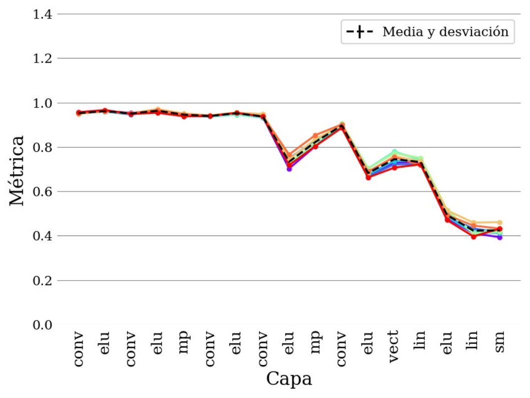


MNIST

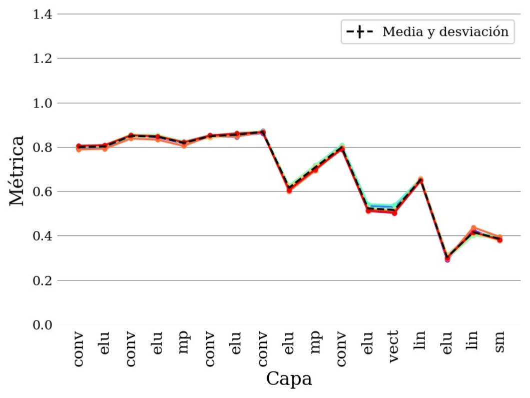


CIFAR10

Inicialización Aleatoria - Invarianza VN

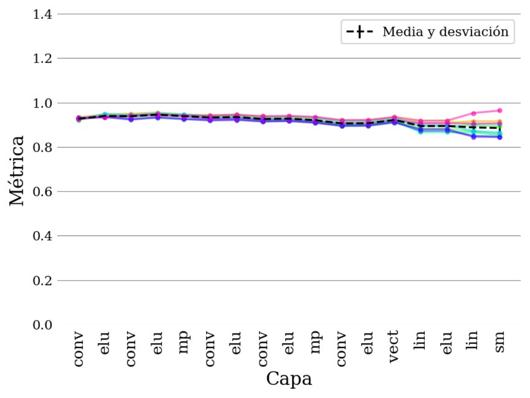


MNIST

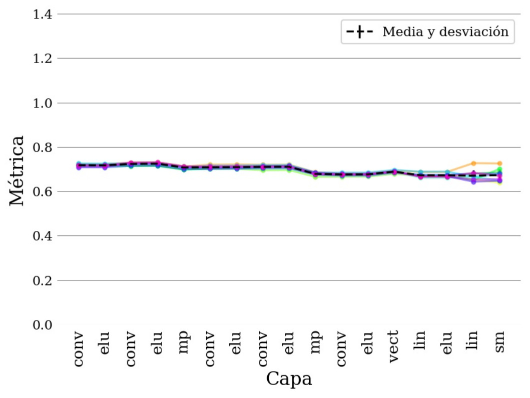


CIFAR10

Pesos Aleatorios - Invarianza VN

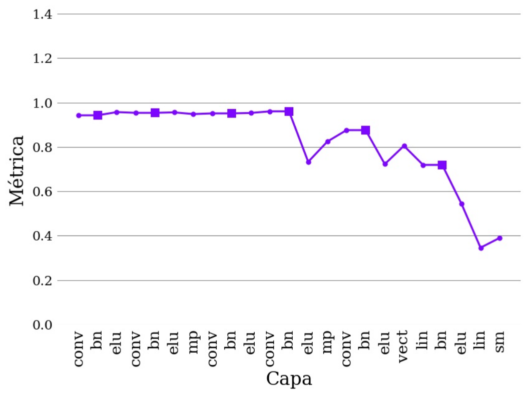


MNIST

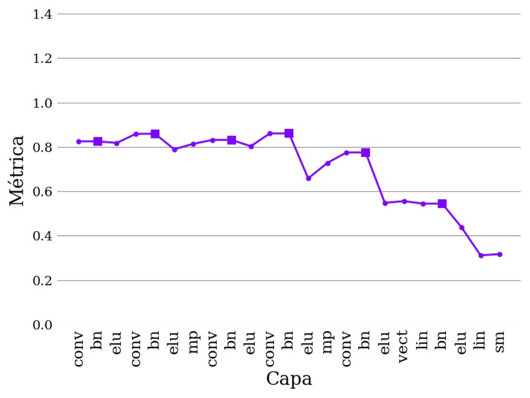


CIFAR10

Batch Normalization - Invarianza



MNIST



CIFAR10

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones

- Capas Invariantes $\neq$ Modelo Invariante
    - Necesidad de aumentación de datos
- Métricas eficientes e interpretables de Invarianza y Auto-Equivarianza
- Caracterización de de la invarianza y autoequivarianza de varios modelos/características
- Metodología para analizar invarianza y equivarianza

Publicaciones principales

1. Quiroga y col., «Revisiting Data Augmentation for Rotational Invariance in Convolutional Neural Networks», 2018
2. Quiroga y col., «Measuring (in) variances in Convolutional Networks», 2019
3. Quiroga y col., «Invariance and Same-Equivariance Measures for Neural Networks (en prensa)», 2020

Publicaciones secundarias

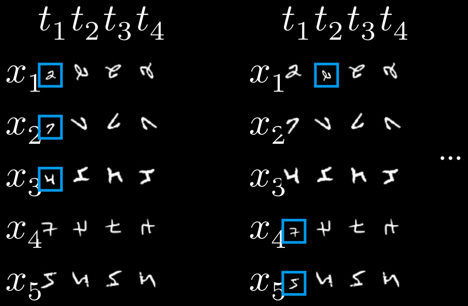
1. Quiroga y Corbalán, «A novel competitive neural classifier for gesture recognition with small training sets», 2013
2. Ronchetti y col., «Distribution of Action Movements (DAM): a Descriptor for Human Action Recognition», 2015
3. Quiroga y col., «Handshape recognition for argentinian sign language using probsom», 2016
4. Quiroga y col., «Sign languague recognition without frame-sequencing constraints: A proof of concept on the argentinian sign language», 2016
5. Quiroga y col., «LSA64: An Argentinian Sign Language Dataset», 2016
6. Quiroga y col., «A study of convolutional architectures for handshape recognition applied to sign language», 2017
7. Cornejo Fandos y col., «Recognizing Handshapes using Small Datasets», 2019

Trabajo Futuro

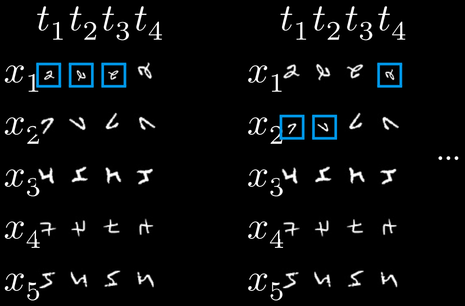
1. Herramienta
    - Soporte de TensorFlow
    - Mejor performance
    - Mejor reporte
2. Métricas
    - Caracterización teórica
    - Métrica de equivarianza
    - Unicidad de la equivarianza
3. Aplicaciones
    - Más modelos invariantes: GCNN, capsules, etc
    - Distintos tipos de modelos: recurrentes, GANs, etc
    - Otros dominios: sesgos y ejemplos adversariales

¡Gracias!

Recorrido por lotes de $\mathbf{MT}$(a)



Por columnas



Por filas

Eficiente: $\mathcal{O}(k \times n \times m)$

Especialización para Mapas de Característica

- Mapa de características F de $h \times w$
- Activaciones $F[i,j]$

$$VT(F) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{w} VT(F(i,j))$$

$$VM(F) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{w} VM(F(i,j))$$

$$VN(F) = \frac{VT(F)}{VM(F)}$$

Métrica Distancia Normalizada

- Reemplazar Var por DistanciaMedia
- DistanciaMedia entre pares de activaciones
  - Cualquier medida de distancia
- Misma interpretación que Varianza Normalizada

$$DT(a) = \text{Media}\left(\left[\, \text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}[1,:]) \cdots \text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}[n,:]) \,\right]\right)$$

$$DM(a) = \text{Media}\left(\left[\, \text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}[:,1]) \cdots \text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}[:,m]) \,\right]\right)$$

$$DN(a) = \frac{DT(a)}{DM(a)}$$

[9]

Métrica DISTANCIA TRANSFORMACIONAL: detalles

$$
\begin{array}{cc}
 & \rightarrow \text{(1) DistanciaMedia} \\
\text{(2) Media} \downarrow &
\begin{bmatrix}
a(t_1(x_1)) & a(t_2(x_1)) & a(t_3(x_1)) & a(t_4(x_1)) \\
a(t_1(x_2)) & a(t_2(x_2)) & a(t_3(x_2)) & a(t_4(x_2)) \\
a(t_1(x_3)) & a(t_2(x_3)) & a(t_3(x_3)) & a(t_4(x_3)) \\
a(t_1(x_4)) & a(t_2(x_4)) & a(t_3(x_4)) & a(t_4(x_4)) \\
a(t_1(x_5)) & a(t_2(x_5)) & a(t_3(x_5)) & a(t_4(x_5))
\end{bmatrix}
\end{array}
\implies Media\left(\begin{bmatrix}
\text{DistanciaMedia}([\, a(t_1(x_1)) \; a(t_2(x_1)) \; a(t_3(x_1)) \; a(t_4(x_1)) \,]) \\
\text{DistanciaMedia}([\, a(t_1(x_2)) \; a(t_2(x_2)) \; a(t_3(x_2)) \; a(t_4(x_2)) \,]) \\
\text{DistanciaMedia}([\, a(t_1(x_3)) \; a(t_2(x_3)) \; a(t_3(x_3)) \; a(t_4(x_3)) \,]) \\
\text{DistanciaMedia}([\, a(t_1(x_4)) \; a(t_2(x_4)) \; a(t_3(x_4)) \; a(t_4(x_4)) \,]) \\
\text{DistanciaMedia}([\, a(t_1(x_5)) \; a(t_2(x_5)) \; a(t_3(x_5)) \; a(t_4(x_5)) \,])
\end{bmatrix}\right)
$$

$$
DT(a) = Media\left(\begin{bmatrix}
\text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}(a)[1, :]) \\
\cdots \\
\text{DistanciaMedia}(\mathbf{MT}(a)[n, :])
\end{bmatrix}\right) \qquad [10]
$$

DistanciaMedia $\rightarrow$ Media(Matriz de distancias de $m \times m$)

Aproximación de DISTANCIA TRANSFORMACIONAL

- No hay calculo online de distancias por pares
  - Eficiencia $\mathcal{O}(m \times m \times n \times k)$
- $\rightarrow$ Aproximación de $\mathrm{DistanciaMedia}$
- **Sólo** calcular distancias entre los b ejemplos de un lote
  - Eficiencia $\mathcal{O}(b \times b \times \frac{m \times n}{b} \times k) = \mathcal{O}(b \times m \times n \times k)$
  - b más grande $\rightarrow$ mejor aproximación
  - b más chico $\rightarrow$ menor cómputo

Distancia Normalizada vs Varianza Normalizada

- Para distancia euclídea
  - $\text{DistanciaMedia}([\, x_1 \; \cdots \; x_n \,]) = 2\, Var([\, x_1 \; \cdots \; x_n \,])$
  - $DN(a) \simeq VN(a)$
- $\rightarrow VN$ es un caso particular de DN
  - Más eficiente
  - Sin aproximación

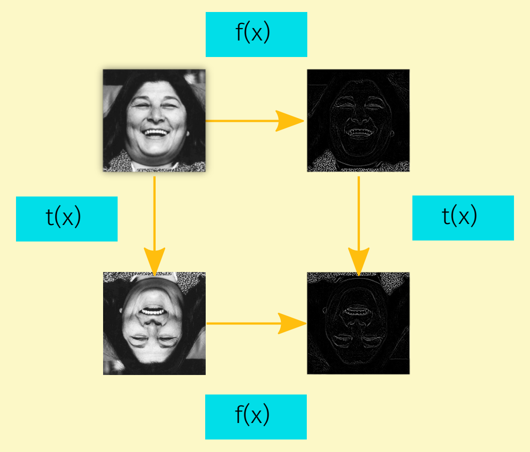
Métrica Auto-Equivarianza de Distancia Simple

$$
\begin{aligned}
AEDS(A) = \mathrm{Media}(& \\
& Distancia(A(t_1(x_0)), t_1(A(x_0))), \\
& Distancia(A(t_2(x_0)), t_2(A(x_0))), \\
& \ldots, \\
& Distancia(A(t_m(x_0)), t_m(A(x_0))), \\
& \ldots, \\
& Distancia(A(t_m(x_n)), t_m(A(x_n))), \\
&)
\end{aligned}
$$

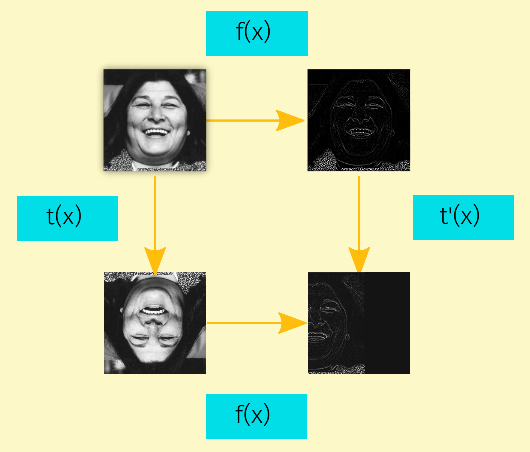
[11]

Métrica Auto-Equivarianza de Distancia Simple

- $\mathcal{O}(k \times m \times n)$ con distancia arbitraria
- No requiere t_i invertible
- Pierde transformaciones/-muestras
- Requiere normalizar activaciones



Métrica de Equivarianza por capas de Lenc



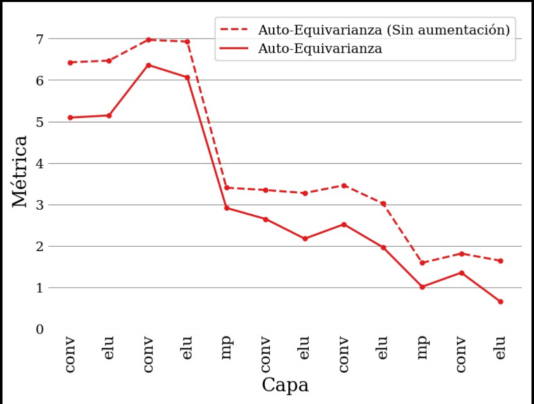
1. Asume $t'(x) = Ax$
2. Aprende $t'(x)$ mediante descenso de gradiente
3. Conjunto de datos:
   - Entrada: $f(x)$
   - Salida: $f(t(x))$
4. $|A - I|$ mide Invarianza

Problemas: aprendizaje, escalabilidad, interpretabilidad

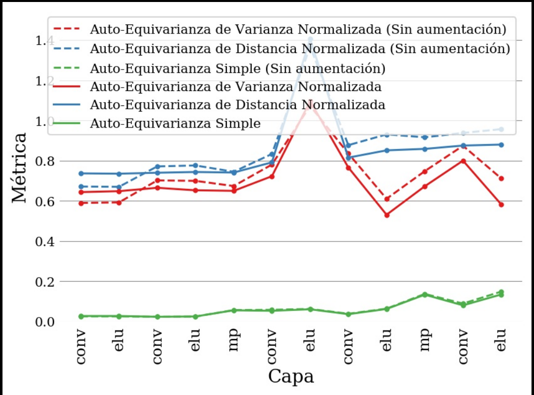
Modelos/Datos/Transformaciones/Métricas

- Probamos
  - MNIST, CIFAR10
  - SimpleConv, AllConvolutional, VGG16, ResNet, TIPooling
  - Rotaciones, Escalados, Translaciones, Combinaciones
  - Invarianza: VT/VM/VN, DT/DM/DN, ANOVA, Goodfellow
  - Autoequivarianza: AEVT/AEVM/AEVN, AEDT/AEDM/AEDN, AEDS
- Veremos: MNIST/CIFAR10, SimpleConv, Rotaciones, Invarianza de VN/ Auto-Equivarianza de VN

Auto-Equivarianza - VN

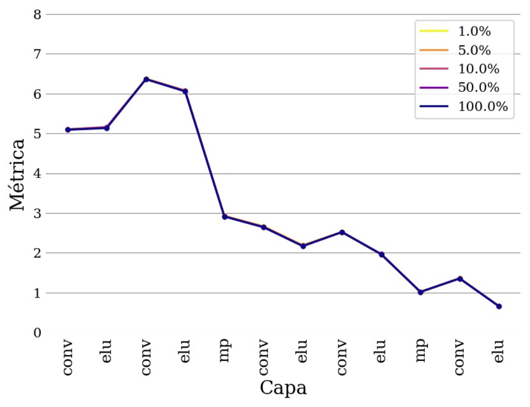


MNIST

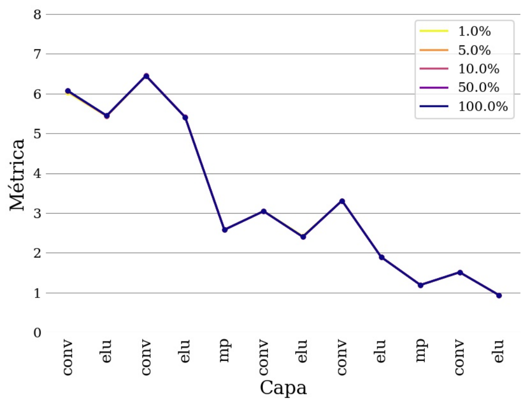


CIFAR10

Tamaño del Conjunto de Datos - Auto-Equivarianza V

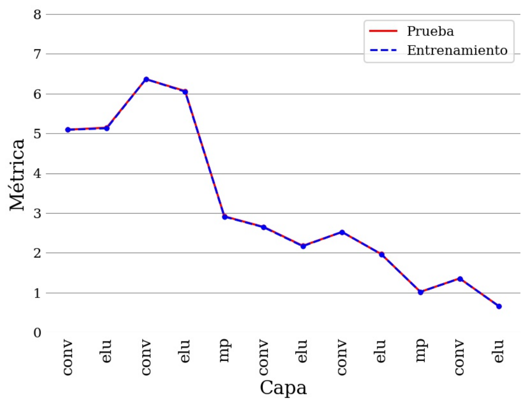


MNIST

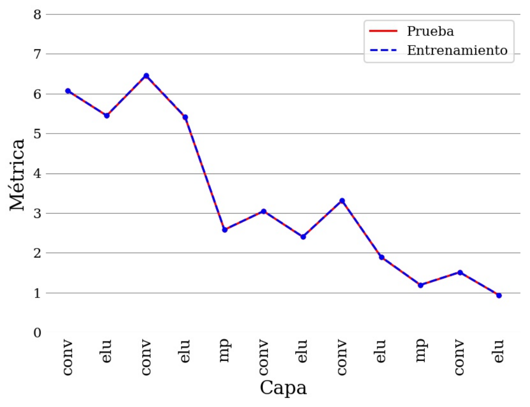


CIFAR10

Subconjunto de Datos - Auto-Equivarianza VN

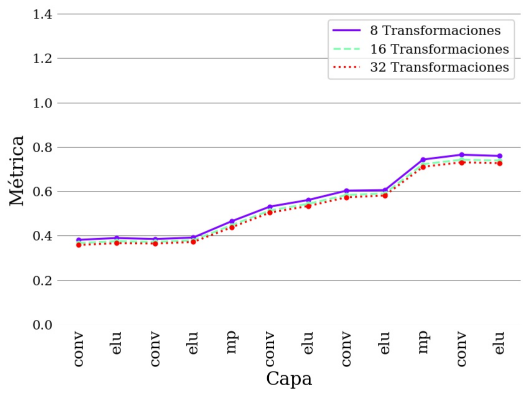


MNIST

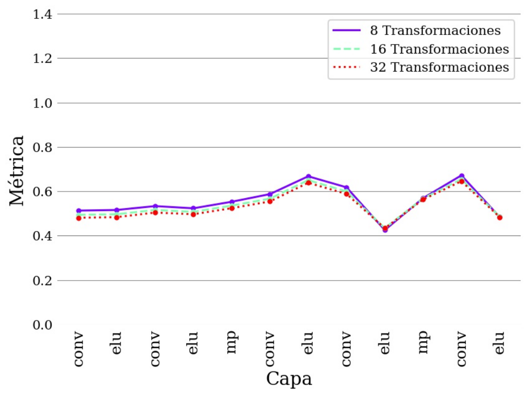


CIFAR10

Tamaño del Conj. de Transformaciones - Auto-Equivarianza VN

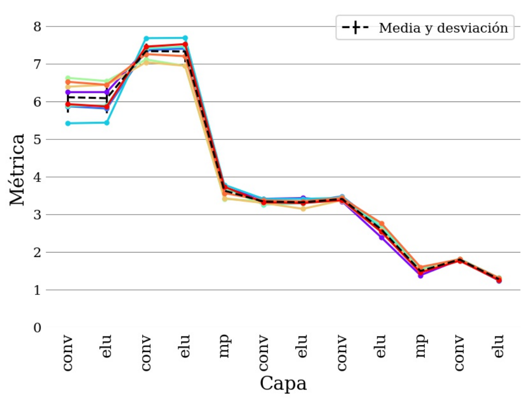


MNIST

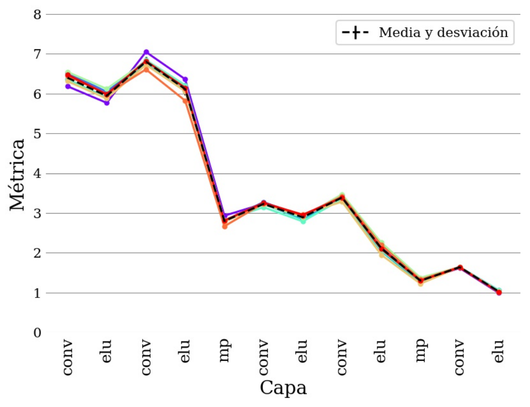


CIFAR10

Inicialización Aleatoria - Auto-Equivarianza VN

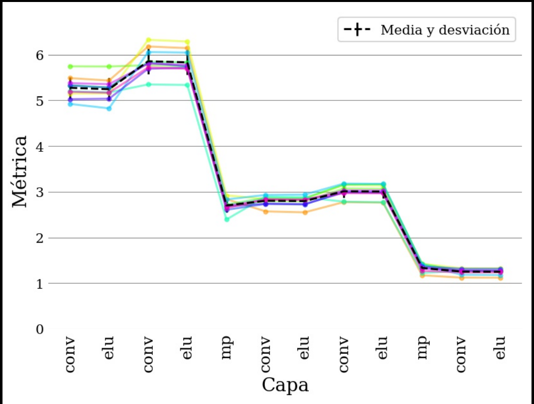


MNIST

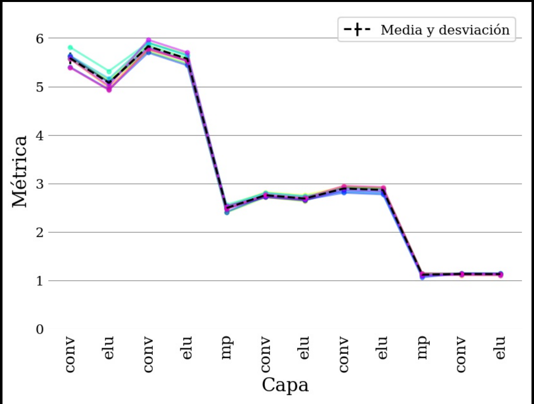


CIFAR10

Pesos Aleatorios - Auto-Equivarianza VN

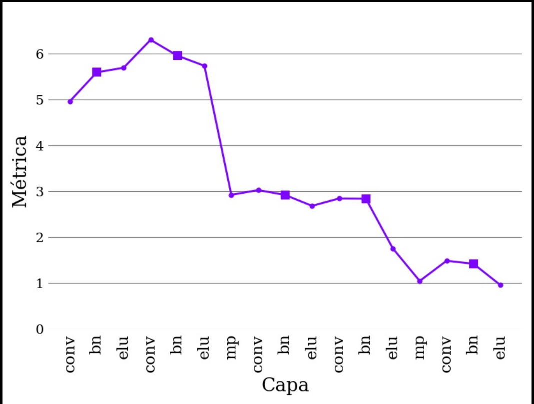


MNIST

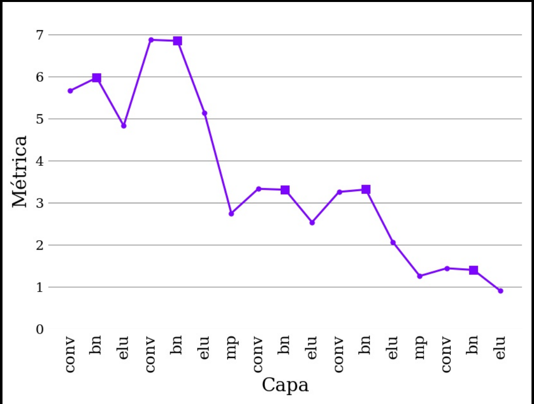


CIFAR10

Batch Normalization - Auto-Equivarianza

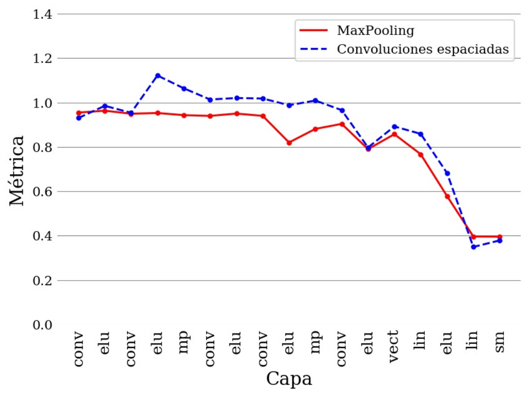


MNIST

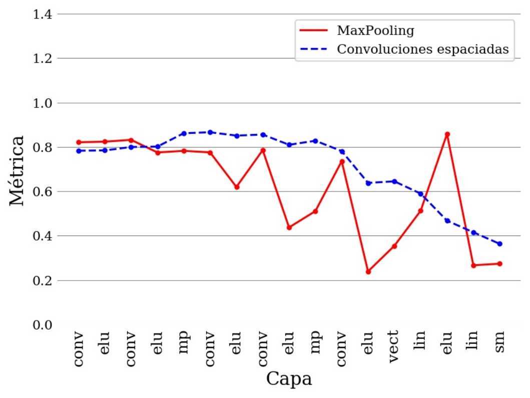


CIFAR10

MaxPool. vs Convoluciones con paso=2 - Invarianza

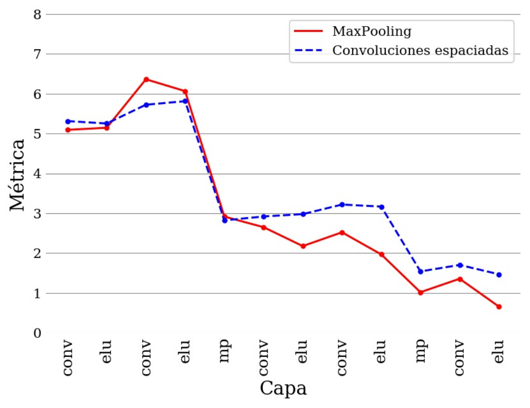


MNIST

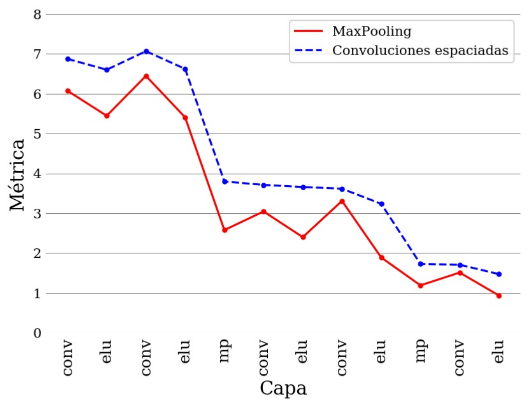


CIFAR10

MaxPool. vs Convoluciones con paso=2 - Auto-Equivarianza

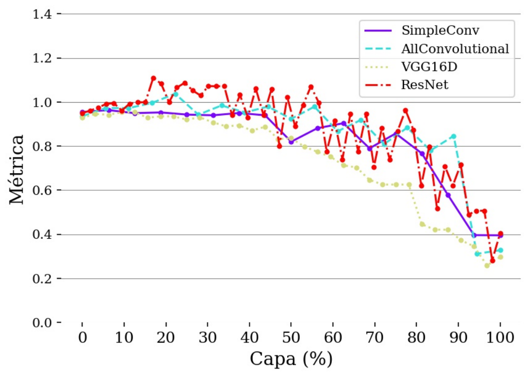


MNIST

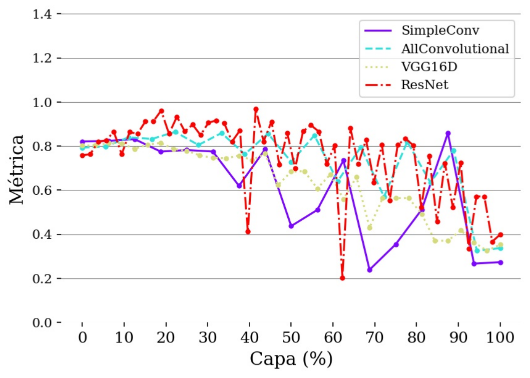


CIFAR10

Comparación de modelos - Invarianza

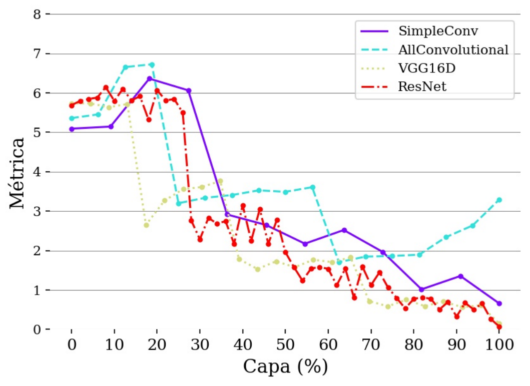


MNIST

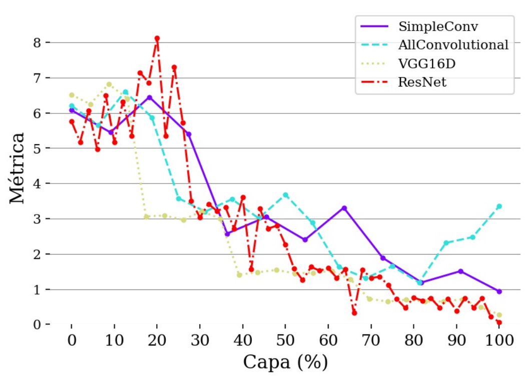


CIFAR10

Comparación de modelos - Auto-Equivarianza



MNIST



CIFAR10

Estudio de modelos - Conclusiones

- Batch Normalization
  - $\rightarrow$ No cambia la estructura de la invarianza/auto-equivarianza
- Max Pooling vs Convoluciones con paso = 2
  - $\rightarrow$ Cambia la estructura de la invarianza
  - $\rightarrow$ No cambia la estructura de la auto-equivarianza
- Comparación de modelos
  - $\rightarrow$ Distribución similar de equivarianza